S E N S 2 0 0 8
Fourth Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, NANOTECHNOLOGY, SAFETY
4–7 June 2008, Varna, Bulgaria

АНАЛИТИЧНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА СПЪТНИК В СИНХРОНЕН РЕЗОНАНС. ИЗСЛЕДВАНЕ НА ВТОРИЧНИ СЪОТНОШЕНИЯ 1:n

Костадин Шейретски, Пламен Тренчев, Стилиян Луков

Институт за космически изследвания – Българска академия на науките
e-mail: sheiretsky@abv.bg

Ключови думи: *небесна механика, нелинейна динамика, хаотична динамика*

Резюме: *В статията е приложен методът на пертурбациите за анализ на вторичните резонанси на спътник, извършващ равнинно въртеливо движение в резонанс 1:1 с орбиталното. Изследвана е структурата на фазовото пространство, като е направена и оценка на влиянието върху резонансното движение на членовете, разглеждани като смущение. Определена е ширината на хаотичната зона около сепаратрисата. Като пример е разгледан резонанса 1:2.*

ANALYTICAL SURVEY OF A SATELLITE IN THE REGIME OF SYNCHRONOUS RESONANCE INVESTIGATION OF SECONDARY PROPORTION 1:n

Kostadin Sheiretsky, Plamen Trenchev, Stilian Lukov

Space Research Institute - Bulgarian Academy of Sciences

Key words: *celestial mechanics, nonlinear oscillations, chaotic dynamic*

Abstract : *The present paper applies the perturbation method to analyze the secondary resonances of a satellite with planar spin-rotation in resonance 1:1 to the orbital revolution. Surveyed is the structure of the phase space; the influence impact on the resonance motion of Hamiltonian's members, viewed as disturbances, is estimated. Determined is the width of the chaotic layer near the separatrice. The resonance proportion 1:2 is considered as exemplary one.*

Въведение

Разглеждаме модел, при който крайният стадий на дълговременната динамическа еволюция на спътник представлява равнинно (в равнината на орбитата), въртеливо движение, в резонанс 1:1 с орбиталното движение, при това оста на въртене съвпада с оста на максималния момент на инерция на спътника. Целта, която се поставя е да се изследва фазовото пространство във вътрешността на синхронния резонанс, като се използва теорията на пертурбациите.

Математическа формулировка на модела

Приема се, че центърът на масите на спътника се движи по кеплерова орбита около централното тяло, оста на въртене на спътника е перпендикулярна на орбиталната равнина и съвпада с оста на максималния момент на инерцията. Дисипативните ефекти, както и смущенията предизвикани от други планети или спътници се пренебрегват.

Нека $A < B < C$ са главните моменти на инерцията на спътника. Отбелязваме с R и v съответно орбиталния радиус и истинската аномалия на кеплеровата орбита. Нека x е ъгълът между голямата ос на елипсоида и периапсидната линия. Уравнението на движение може да се изведе от уравненията на Ойлер за твърдото тяло

(1) $$\ddot{x}+\frac{\omega^2}{R^3}\sin(2x-2\nu)=0,$$

където $\omega^2=\frac{3}{2}\frac{B-A}{C}$. Счита се, че в уравнение (1) е извършена нормализация ($2\pi/T_{ОРБИТАЛЕН}=1$).

Променливите R и ν са известни кеплерови функции на времето, така че е възможно уравнението да се разложи в ред на Фурие [1]

(2) $$\ddot{x}+\omega^2\sum_{m\neq 0,m=-\infty}^{\infty}W\left(\frac{m}{2},e\right)\sin(2x-mt)=0.$$

Коефициентите $W\left(\frac{m}{2},e\right)$ са пропорционални на $e^{|m-2|}$ (Cayley 1859).

Факта, че пренебрегваме приливния ефект, налага разглеждането на краен брой членове от реда до порядък съизмерим с порядъка на дисипативните ефекти

(3) $$\ddot{x}+\omega^2\sum_{m\neq 0,m=N_1}^{N_2}\tilde{W}\left(\frac{m}{2},e\right)\sin(2x-mt)=0,$$

следователно, уравнението до втори ред по степените на ексцентрицитета изглежда така [1]

(4) $$\ddot{x}+\frac{\omega^2}{2}\sin 2(x-t)-\frac{e\omega^2}{4}\left[\sin(2x-t)-7\sin(2x-3t)\right]+$$
$$+\frac{e^2\omega^2}{4}\left[17\sin(2x-4t)-5\sin(2x-2t)\right]=0.$$

Извеждане и изследване на резонансния хамилтониян

Приема се, че ексцентрицитета е достатъчно малък за да пренебрегнем изразите от втора степен по ексцентрицитета. Прави се каноничната замяна на променливите по формулите

(5) $$Q=2(x-t),\ P=2(\dot{x}-1),$$

и се получава хамилтонияна на смутено нелинейно махало

(6) $$H=\frac{P^2}{2}-\omega^2\cos Q+\frac{\omega^2 e}{2}\cos(Q+t)-\frac{7\omega^2 e}{2}\cos(Q-t).$$

Първите два члена на (6) съвпадат с хамилтонияна на махалото, последните два члена разглеждаме като смущение. Разлагаме косинусът в несмутения хамилтониян в ред на Тейлър и се ограничаваме до първите три члена. Въвеждаме нови канонични променливи действие и ъгъл, посредством формулите

(7) $$Q=\sqrt{\frac{2J}{\omega}}\sin\theta,\ P=\sqrt{2J\omega}\cos\theta.$$

Следваме методът на Поанкаре [4] и търсим такова канонично преобразувание $J,\theta\to\bar{J},\bar{\theta}$, че в новите променливи, новополучения хамилтониян да е функция само на променливата действие, разлагаме в ред и косинусите на смущението. В резултат се достига до израза

(8) $$\bar{H}=\omega\bar{J}-\frac{\bar{J}^2}{16}-\frac{7\omega^2 e}{2}J_n\left(\sqrt{\frac{2\bar{J}}{\omega}}\right)\cos(n\theta-t)+\frac{\omega^2 e}{2}J_n\left(\sqrt{\frac{2\bar{J}}{\omega}}\right)\cos(n\theta+t)$$
$$-\frac{7\omega^2 e}{2}\sum_{m\neq н}J_m\left(\sqrt{\frac{2\bar{J}}{\omega}}\right)\cos(m\theta-t)+\frac{\omega^2 e}{2}\sum_{m\neq н}J_m\left(\sqrt{\frac{2\bar{J}}{\omega}}\right)\cos(m\theta+t)$$

Извършва се канонична замяна, като използваме производящата функция

$$S=-\frac{\bar{J}}{n}(\Psi+t).$$

Новите канонични променливи са съответно $I = \frac{\bar{J}}{n}$ и $\Psi = n\theta - t$, отчита се и факта, че $\frac{\partial S}{\partial t} = -I$.

В новите канонични променливи хамилтонияна приема вида

$$H = (n\omega - 1)I - \frac{n^2 I^2}{16} - \frac{7\omega^2 e}{2} J_n\left(\sqrt{\frac{2nI}{\omega}}\right)\cos\Psi + \frac{\omega^2 e}{2} J_n\left(\sqrt{\frac{2nI}{\omega}}\right)\cos(\Psi + 2t)$$

(9)

$$- \frac{7\omega^2 e}{2}\sum_{m \neq н} J_m\left(\sqrt{\frac{2nI}{\omega}}\right)\cos\left(\frac{m}{n}\Psi - \left(1 - \frac{m}{n}\right)t\right) + \frac{\omega^2 e}{2}\sum_{m \neq н} J_m\left(\sqrt{\frac{2nI}{\omega}}\right)\cos\left(\frac{m}{n}\Psi + \left(1 + \frac{m}{n}\right)t\right).$$

Първите три члена в (9) определяме като резонансен хамилтониян H_r, а останалите се разглеждат като смущение

(10) $$H_r = (n\omega - 1)I - \frac{n^2 I^2}{16} - \frac{7\omega^2 e}{2} J_n\left(\sqrt{\frac{2nI}{\omega}}\right)\cos\Psi .$$

Стационарните точки се намират като приравняваме на нула производните на действието и на ъгъла по времето,

(11) $$\dot{\Psi} = \frac{\partial H_r}{\partial I} = 0,$$

$$\dot{I} = -\frac{\partial H_r}{\partial \Psi} = 0.$$

Нека тези стойности са съответно $I = I_0$, $\Psi = \Psi_0$. Изследваме динамичната система в близост до резонансните стойности на променливите

(12) $I = I_0 + p$, $\psi = \psi_0 + \xi$.

Разлагаме израза за H_r в (10) и по двете променливи в ред, като взимаме първите три члена от разложението. При условие $\Psi_0 = \kappa\pi, \kappa \in Z$, може да се достигне до израз за хамилтониян на линеен осцилатор. Като имаме предвид това и се извърши групиране на членовете пред еднаквите степени на p се достига до израза

$$-\left\{\frac{n^2}{16} - \frac{7\omega^2 e}{4}\left[J_n''\left(\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega}}\right)\frac{n}{2\omega I_0} - J_n'\left(\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega}}\right)\frac{1}{I_0^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{n}{8\omega}}\right]\cos\Psi_0\right\}p^2 +$$

(13)

$$-\frac{7\omega^2 e}{2}\frac{J_n\left(\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega}}\right)\cos\psi_0}{2}\xi^2 = H_r - H_{r0},$$

където

$$\Delta = n\omega - 1,$$

$$\Delta I_0 - \frac{n^2 {I_0}^2}{16} - \varepsilon F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega}}\right)\cos\Psi_0 = H_{r0}.$$

Посредством анализ на уравнение (13) може да се определи устойчивостта на стационарните точки в зависимост от параметрите.

Конкретизираме изследването за $n = 2$ и изследваме първите три члена на (10), като останалата част се приема за смущение.

(14) $$H_r = (2\omega - 1)I - \frac{I^2}{4} - \frac{7\omega^2 e}{2}\left(\frac{I}{2\omega} - \frac{I^2}{\omega^2 6}\right)\cos\Psi .$$

В (14) са използвани първите два члена от разлагането на беселовата функция $J_2\left(\sqrt{\dfrac{4I}{\omega}}\right)$ по степените на аргумента. От тук могат да се намерят и производните на променливите по времето

(15) $$\dot{\Psi} = \frac{\partial H_r}{\partial I} = (2\omega - 1) - \frac{I}{2} + \left(-\frac{7\omega e}{4} + \frac{7eI}{6}\right)\cos\Psi ,$$

$$\dot{I} = -\frac{\partial H_r}{\partial \Psi} = \frac{7\omega^2 e}{2}\left(\frac{I}{2\omega} - \frac{I^2}{6\omega^2}\right)\sin\Psi .$$

Стационарните точки се намират от системата, като производните по времето на действието и на ъгъла тъждествени приравним на нула. В резултат се достига до изразите

(16) $$\Psi_0 = 0 \left(\operatorname{mod} \pi\right), I = I_0^0 = \frac{(2\omega - 1) - \frac{7}{4}\omega e}{\frac{1}{2} - \frac{7}{6}e}, \Psi_0 = \pi \left(\operatorname{mod} \pi\right), I = I_0^\pi = \frac{(2\omega - 1) + \frac{7}{4}\omega e}{\frac{1}{2} + \frac{7}{6}e} .$$

Ограничаваме разглеждането, до $e < \dfrac{3}{7}$.

При $\omega < \dfrac{1}{2 - \frac{7}{4}e}$ съществува само една стационарна точка. Разглеждат се колебанията на системата около тази точка. Уравнението, което описва процеса е

(17) $$\left(\frac{1}{2} + \frac{7e}{6}\right)\frac{p^2}{2} + \left(\frac{7e\omega}{4}I_0^\pi - \frac{7}{12}e{I_0^\pi}^2\right)\frac{\xi^2}{2} = H_{r0} - H_r .$$

Устойчивите състояния отговарят на изискванията $3\omega > I_0^\pi > 0$, което води до неравенствата

(18) $$\frac{1}{2 + \frac{7}{4}e} < \omega < \frac{1}{2 - \frac{7}{4}e} < \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{7}{4}e} .$$

Да разгледаме случая $\omega > \dfrac{1}{2 - \frac{7}{4}e}$. В този случай е възможно да се появи втората стационарна точка. Уравнението описващо колебанията при $\Psi = 0$ е

(19) $$\left(\frac{1}{2} - \frac{7e}{6}\right)\frac{p^2}{2} + \left(-\frac{7e\omega}{4}I_0 + \frac{7}{12}e{I_0}^2\right)\frac{\xi^2}{2} = H_{r0} - H_r$$

Очевидно, устойчивите състояния отговарят на условието $I_0 > 3\omega$, като се отчете израза за I_0 се достига до неравенството

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{7}{4}e} < \omega .$$

Това неравенство следва да отпадне, тъй като разглежданите от нас честоти трябва да са близки по стойност с $\dfrac{1}{2}$. От тук следва, че стационарната точка е неустойчива.

Изследване ширината на хаотичната зона около вторичен резонанс

Разглеждаме хамилтонияна (8), като пренебрегваме нерезонансните членове, правим канонична замяна, въвеждаме нова променлива $\Psi = n\theta - t$ и използваме за производяща функция $F(I, \Psi, t) = -(I - \bar{I}_0)\dfrac{\Psi + t}{n}$, където $\bar{I}_0$ е резонансната стойност на действието, полагаме $p = \dfrac{I - \bar{I}_0}{n}$, отчитаме и факта, че $\dfrac{\partial F}{\partial t} = -p$. Като се направи смяната, се достига до израза за хамилтонияна в новите променливи

$$
\begin{aligned}
H_r &= \omega \bar{I}_0 + \omega n p - \frac{\bar{I}_0^{\,2}}{16} - \frac{n^2 p^2}{16} - \frac{n \bar{I}_0 p}{8} - \\
&- \frac{7\omega^2 e}{2} J_n\left(\sqrt{\frac{2\left(\bar{I}_0 + np\right)}{\omega}}\right)\cos\Psi + \frac{\omega^2 e}{2} J_n\left(\sqrt{\frac{2\left(\bar{I}_0 + np\right)}{\omega}}\right)\cos\left(\Psi + 2t\right).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

За да приведем хамилтонияна в обичайния вид, характерен за уравнение на махалото, полагаме $\Psi = \pi + \overline{\Psi}$. Пренебрегваме p спрямо I_0 в аргумента на беселовата функция. Достига се до уравнение от вида

$$
H_0 = \frac{p^2}{2} - \Omega_{01}^2 \cos\overline{\Psi} + \varepsilon \Omega_{02}^2 \cos\left(\overline{\Psi} - \lambda t\right),\ \lambda \in Z\,. \tag{21}
$$

Интересуваме се от изменението на енергията, когато динамичната система описва движения около сепаратрисата. Взимаме съответните изрази за променливите съответстващи на сепаратрисния случай

$$
\overline{\Psi} = 4 arctg\, e^{\pm \Omega_{01}\left(t - t_n\right)},\ \dot{\overline{\Psi}} = \pm \frac{2\Omega_{01}}{ch \Omega_{01}\left(t - t_0\right)}\,. \tag{22}
$$

Изменението на енергията, за определено време, на несмутения хамилтониян, под действието на пертурбацията се намира с интеграла

$$
\Delta E = \int \left[H_0, H\right] dt = \int \dot{\overline{\Psi}} \varepsilon \Omega_{02}^2 \sin\left(\overline{\Psi} - \lambda t\right) dt \tag{23}
$$

Големината на хаотичната зона около вторичен резонанс ще намерим следвайки [3].

Нека центъра на солитона е разположен в точка t_n. Доколкото $\dot{\overline{\Psi}}$ експоненциално намалява с времето, записваме интеграла (23) в окончателния му вид

$$
\left|\Delta E\right| = \varepsilon \Omega_{02}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\overline{\Psi} - \frac{\lambda}{\Omega_{01}}\tau - \varphi_n\right) \dot{\overline{\Psi}} \frac{d\tau}{\Omega_{01}},\ \Omega_{01}\left(t - t_n\right) = \tau,\ \varphi_n = \lambda t_n\,. \tag{24}
$$

Честотата на махалото около сепаратрисите, както е известно се изразява така

$$
\omega\left(E\right) = \frac{\pi \Omega_{01}}{\ln\left(\dfrac{32 E_s}{\left|E - E_s\right|}\right)},\ E_s = \Omega_{01}^2\,.
$$

Нека $\left(E, \varphi\right) \to \left(\overline{E}, \overline{\varphi}\right)$ е изображение, свързващо параметрите преди действието на импулса на скоростта отчетено за време равно на половин период. Тогава това изображение в явен вид се записва така

$$
\overline{E} = E + \Delta E\,,\ \overline{\varphi} = \varphi + \frac{\pi \lambda}{\omega\left(E\right)} = \varphi + \frac{\lambda}{\Omega_{01}} \ln\left(\frac{32 E_s}{\left|E - E_s\right|}\right). \tag{25}
$$

Известно е, че локалната неустойчивост се развива по-бързо по фазовата променлива. Малко изменение на действието вследствие на смущението води до малко изменение на честотата на колебанията на осцилатора. Близо до сепаратрисите, където периода на осцилирането е по-голям, даже малко изменение на честотата води до силна промяна на фазата.

За да се оцени локалната неустойчивост, се въвежда параметъра k

$$
k = \left|\frac{\delta \overline{\varphi}}{\delta \varphi} - 1\right|. \tag{26}
$$

Условието за границата при която се появява стохастична динамика около сепаратрисите е $k \ge 1$, в конкретния случай

$$
k = \frac{\left|\lambda\right|}{\Omega_{01}} \frac{\Delta E}{\left|E - E_s\right|} \left|\sin \varphi\right|.
$$

В случая на $n = 2$ хамилтонияна има вида

(27) $$\frac{p^2}{2} - \Xi^2 \cos\psi + \frac{1}{7}\Xi^2 \cos(\Psi + 2t) = H ,$$

където $J_2\left(\frac{2I_0}{\omega}\right) \approx \frac{I_0}{4\omega}$ и $\Xi^2 = \frac{7e\omega I_0}{4}$.

Интегралът с който се определя изменението на енергията се записва така

(28) $$|\Delta E| = \frac{\Xi}{7}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\psi + \frac{2}{\Xi}\tau + \varphi_n\right)\dot{\Psi} d\tau ,\ \varphi_n = 2t_n .$$

Може да се докаже, че той се свежда до интеграл от вида

(29) $$|\Delta E| = \frac{2}{7}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\Psi + \frac{2}{\Xi}\tau + \varphi_n\right) d\tau .$$

Решението се дава с т.н. интеграл на Мелников-Арнолд.

(30) $$|\Delta E| = \frac{2}{7} A_2\left(-\frac{2}{\Xi}\right) \sin\varphi_n .$$

Като използваме формулите за изчисляване стойността на интеграла на Мелников-Арнолд, получаваме резултата

(31) $$A_2\left(-\frac{2}{\Xi}\right) = \frac{16\pi}{\Xi} \exp\left(-\frac{3\pi}{\Xi}\right).$$

Окончателно, за безразмерната ширина на хаотичната зона се получава неравенството.

(32) $$\frac{\delta E}{E} \equiv \frac{|E - E_s|}{E_s} \le \frac{8\pi}{7}\left(\frac{2}{\Xi}\right)^3 \exp\left(-\frac{3\pi}{\Xi}\right).$$

Заключение

Посредством използването на каноничните трансформации и теорията на пертурбацията е анализирана структурата на вътрешността на синхронен резонанс. Моделът дава възможност да се определят параметрите на динамичната система, при които даден вторичен резонанс е устойчив или пък претърпява бифуркации, а също и влиянието на членове в хамилтонията определени като смущение, което се изразява в хаотизиране на зоната около сепаратрисите. В частност е направен анализ на вторичен резонанс 1:2.

Литература:

1. Alessandra Celletti, Luigi Chierchia. Hamiltonian stability of spin-orbit resonances in Celestial Mechanics
2. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. Москва, Наука, 1965
3. Заславский Г. М., Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. Москва, Наука, 1990
4. Чириков В. В. Нелинейный резонанс. НГУ, 1977