

SENS ' 2006

Second Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, NANOTECHNOLOGY, SAFETY

14 – 16 June 2006, Varna, Bulgaria

ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ТЕРИТОРИАЛНОТО ПОКРИТИЕ НА ИЗКУСТВЕН СПЪТНИК НА ЗЕМЯТА, ДВИЖЕЩ СЕ ПО КРЪГОВА ОРБИТА

Петър Гецов, Константин Методиев

*Институт за космически изследвания – БАН, София
София, 1000, ул. Московска №6, п.к. 799*

Ключови думи: ИСЗ, кръгова орбита, териториално покритие

EARTH COVERAGE DETERMINATION OF A SATELLITE TRAVELLING ALONG CIRCULAR ORBIT

Petar Getzov, Konstantin Metodiev

Space Research Institute – BAS, 6, Moskovska str., p. o .box 799 Sofia, 1000

Key words: Artificial Satellite, Circular Orbit, Earth coverage

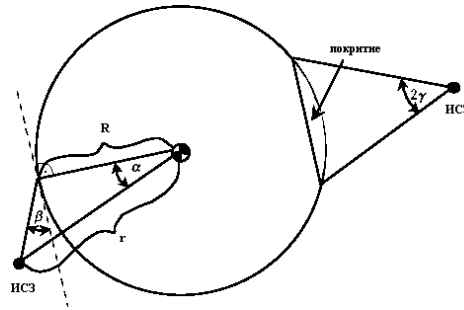
Abstract.

In the paper hereby a method for determination of statistical probability for motionless Earth mark discovering by artificial satellite is used. Relations derived determine the statistic consistence of satellite presence at various latitudes and takes into account Earth rotation. Also a deterministically approaching for time calculation of satellite attendance at Earth mark's discernible hemisphere is applied. Sample calculations at various mark coordinates and orbit inclinations are adduced.

Въведение.

Предназначението на много спътници е да наблюдават или да комуникират с точки от Земята повърхност. Реализацията на тези функции изисква спътниковото зрително поле да е нито твърде голямо, нито твърде малко, така че само определен сегмент от Земята да се покрива от спътника за даден момент от време. Под понятието “покриване” се има в предвид например “възможност за комуникация”, ако целта на спътника е такава. В настоящия доклад е разгледан сегмент с овална форма, който може да апроксимира в достатъчна степен произволна форма, при инклинация на орбитата различна от нула. По този подход

в доклада се определя каква част от Земята ще покрива спътника и време за пребиваването му във видимата полусфера на целта.



Фиг. 1. Кинематични елементи на полета в орбитална равнина.

Теоретични основи.

На фиг. 1 е показана схема в орбитална равнина на движещ се по кръгова орбита ИСЗ. Съгласно чертежа, даден обект е видим за спътника, само ако възвишението на последния, погледнато от целта, е поне β [rad].

Връзката между ъглите на покритието, възвишението и обзорното поле α , β , 2γ е следната (при отношение между радиусите на Земята и орбитата $\rho = R/r < 1$):

$$\gamma + \alpha + \beta = \pi/2 \text{ [rad]}, \quad \alpha = \arccos(\rho \cos \beta) - \beta \text{ [rad]}, \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2. \quad (1)$$

Покритието също може да бъде ограничено от обзорното поле на сензорите, т. е.:

$$\alpha = \arcsin(\sin \gamma / \rho) - \gamma \text{ [rad]}, \quad \sin \gamma \leq \rho. \quad (2)$$

Ако $\sin \gamma > \rho$, тогава обзорното поле на сензорите не е ограничено и е в сила система (1).

Повърхностно покритие с размер α [rad] покрива част f от Земята така, че

$$f = (1 - \cos \alpha)/2, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2. \quad (3)$$

Върху големината на f съществено влияние оказва наклонът на орбитата на спътника (инклинация I). Географската широчина тогава на подсателитната точка се определя чрез главната аномалия θ както следва:

$$\sin \psi = \sin \theta \cdot \sin I. \quad (4)$$

За случай на кръгова орбита, главната аномалия се изменя линейно с времето.

Ефектът от пребиваването на ИСЗ на екстремалните широчини $\pm I$ най-лесно се отчита, третирайки θ като променлива, която случайно се изменя в интервала $[0, 2\pi]$. Тогава пресмятането на съответната плътност на пребиваване на спътника на широчина ψ се извършва чрез функцията

$$f_I(\psi) = \pi^{-1} \cos \psi / \sqrt{\sin^2 I - \sin^2 \psi}, \quad -I < \psi < I. \quad (5)$$

Способността на спътника да открива обекти по Земната повърхност зависи освен от географската широчина, така и от географската дължина на целта. Последната, в относителен смисъл на понятието, се влияе едновременно от въртенето на Земята и спътника. Ако координатите на споменатите величини се измерват по небесната сфера, то за текущата дължина на спътника може да се запише

$$\varphi = \arctg[\tg(\theta) \cdot \cos(I)] \text{ [rad]}. \quad (6)$$

От формули (4) и (6) е видно, че разположението на спътника е периодична функция на главната аномалия θ и следователно е периодична функция на времето. Важно е да се отбележи, че изчисленията неявно показват, че формули (4) и (6) важат за измервано направление към спътника в точка, когато той пресича екватора, тъй като ъглите ψ и φ са нула, когато ъгъл θ е нула.

Ако се допусне, че целта е неподвижна на Земната повърхност, то за координатите на подсателитната точка е в сила системата уравнения

$$\begin{cases} \psi_E = \psi_0 \\ \varphi_E = \varphi_0 + \theta/Q \end{cases}, \quad (7)$$

където ψ_0 и φ_0 по дефиниция са широчината и дължината на целта, когато $\theta = 0$.

Нека $\sphericalangle A$ да бъде ъгълът между (ψ, φ) и (ψ_E, φ_E) . Този ъгъл трябва да бъде по-малък от ъгъла на покритието α , ако е известно, че спътникът покрива целта. Посредством използване на релации от сферичната тригонометрия се получава, че

$$A = \arccos(\cos\psi_E \cdot \cos\psi \cdot \cos(\varphi_E - \varphi) + \sin\psi_E \cdot \sin\psi) [rad]. \quad (8)$$

Ако се пресметне можителя $\cos(\varphi_E - \varphi)$ с помощта на формула (4), уравнение (8) придобива вида:

$$\begin{aligned} A &= \arccos(B \cdot \cos\theta + C \sin\theta) [rad], \quad B = \cos\psi_E \cdot \cos\varphi_E [rad], \\ C &= \cos\psi_E \cdot \sin\varphi_E \cos I + \sin\psi_E \sin I [rad]. \end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнения (9) може да се пренапише и по следния начин:

$$A = \arccos[\cos E \cdot \sin(\theta + D)] [rad], \quad \cos^2 E = B^2 + C^2, \quad D = \arctg(B/A) [rad]. \quad (10)$$

Тъй като нито B , нито C включват θ , то величините D и E имат период Q когато времето се измерва в брой обръщания на спътника; т. е. D и E се изменят бавно във времето. Ъгъл E отделя целта от орбитата на спътника и е достатъчно малка величина, така че ъгъл A да отделя целта от самия спътник. Изменението на ъгъл E е илюстрирано на фиг. 4 чрез обвиващата крива.

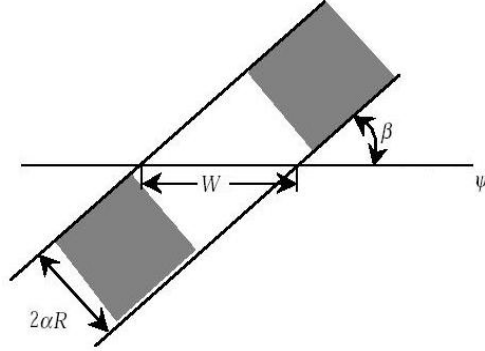
Може да се покаже (вж. Rider (1986)), че за ъгъл E е в сила релацията:

$$\sin E = |\sin\psi_E \cos I - \sin\varphi_E \sin I \cos\psi_E|. \quad (11)$$

Единствената величина във формула (11), зависеща от времето, е ъгъл φ_E . Ако $|\sin\psi_E| < |\sin I|$, тогава винаги ще съществува φ_E , такова че $E = 0$. Иначе казано, най-малката положителна стойност на E е или $|\psi_E - I|$, или $|\psi_E + I|$ – която е по-малка.

При зададени начални стойности на параметрите $\varphi_0, \psi_0, Q, I, \alpha$ и θ_0 , където θ_0 приема не непременно нулева стойност в интервала $[0; 2\pi]$, времето, през което спътника покрива целта, се определя по детерминистичен подход – чрез изследване на диаграми, подобни на изложените на фиг. 4. С оглед на многото на брой параметри, влияещи на спътниковото покритие по географска широчина, е добре ако за по-нататъшните пресмятания се използва статистически метод. Когато спътника се придвижва от “южни” към “северни” географски широчини, в покритието ще попадне определена част g от широчината ψ_E . Ако географската дължина на целта е случайна величина, тогава частта g е статистическа

вероятност за “попадение”. В хода на определяне на g се допуска, че $\alpha \ll \pi$. Тогава местният вид на покритието, при преминаване на спътника над ψ_E , съвпада със случая ако Земята се приеме за плоска. На фиг. 2 са показани региона на покритие и дължината на покриващата лента W за линията на текущата географска широчина.



Фиг. 2. Покриваща лента за текуща географска широчина.

Широчината на покриващата лента е $2\alpha R$, но W е по-голяма по стойност от произведението $2\alpha R$, тъй като спътникът не се движи перпендикулярно на линията $\psi = const$. Ъгълът β тогава се определя чрез релативната скорост на спътника спрямо Земята, чрез хоризонталните и вертикални компоненти на последната, т. е. $R(d\phi/d\theta - \omega)\cos\psi$ и $Rd\psi/d\theta$, където времето се измерва посредством аномалията θ , а така също и чрез ъгловата скорост на Земята $\omega = 1/Q$ [rad rev/rad anomaly]. Посредством диференциране на уравнение (4) се вижда, че $d\psi/d\theta = \cos\theta \sin I / \cos\psi$. Чрез диференциране на уравнение (6) и с използването на известни тригонометрични релации, се получава, че $d\phi/d\theta = \cos I / \cos^2\psi$. Окончателно

$$\beta = \arctg \left[\frac{\frac{d\psi}{d\theta}}{\left(\frac{d\phi}{d\theta} - \omega\right) \cos\psi_E} \right] = \arctg \left[\frac{\cos\theta \sin I}{\cos I - \omega \cos^2\psi_E} \right]. \quad (12)$$

Можителят $\cos\theta$ може да се елиминира от (12) с помощта на уравнение (4), от където следва, че

$$\beta = \arctg \left[\frac{\sqrt{\sin^2 I - \sin^2\psi_E}}{\cos I - \omega \cos^2\psi_E} \right]. \quad (13)$$

Дължината на линията $\psi = const$ е $2\pi R \cos\psi_E$, така че частта от тази линия, покривана за едно преминаване на спътника е

$$g(\psi_E, \omega, I, \alpha) = W / 2\pi R \cos\psi_E = (2\alpha R / \sin\beta) / 2\pi R \cos\psi_E = \alpha / \pi \sin\beta \cos\psi_E. \quad (14)$$

С използване на факта, че $1/\sin^2\beta = 1 + 1/\operatorname{tg}^2\beta$, последното уравнение придобива вида

$$g(\psi_E, \omega, I, \alpha) = \frac{\alpha v(\psi_E, \omega, I) f_I(\psi_E)}{\cos\psi_E}, \quad (15)$$

където $f_I(\psi_E)$ е плътностната функция (5). Функцията

$$v(\psi_E, \omega, I) = \sqrt{1 - 2\omega \cos I + \omega^2 \cos^2 \psi_E} \quad (16)$$

е повърхностната скорост на подсателитната точка с дименсия $[rad/radanomaly]$. Възможни са следните случаи: $v(\psi_E, \omega, 0) = 1$ (няма въртене на Земята), $v(0, 0, 1) = 0$ (геостационарен случай), $v(0, \pi, 1) = 2$ (ретрограден случай).

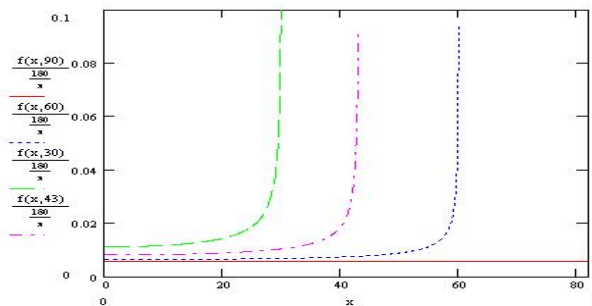
Тъй като спътникът извършва две преминавания за едно обръщане над всяка линия $\psi = const$ и Q обръщания на ден, цел с географска широчина ψ_E ще бъде открита $2Qg(\psi_E, \omega, I, \alpha)$ пъти средно на ден. При пресмятането трябва да се има в предвид, че $g(\psi_E, \omega, I, \alpha) = 0$, освен ако $\sin^2 \psi_E < \sin^2 I$. Ако ъгъл $\alpha = 1$, тогава за цел на широчина ψ_E е в сила израза

$$DR = (180\alpha/\pi)H(\psi_E), \quad H(\psi_E) = \frac{v(\psi_E, I, \omega)f_I(\psi_E)/\omega}{90 \cos \psi_E} \quad (17)$$

където $H(\psi_E)$ е “среден брой откривания на целта за един градус покритие за един ден на географска широчина ψ_E ”.

Резултати.

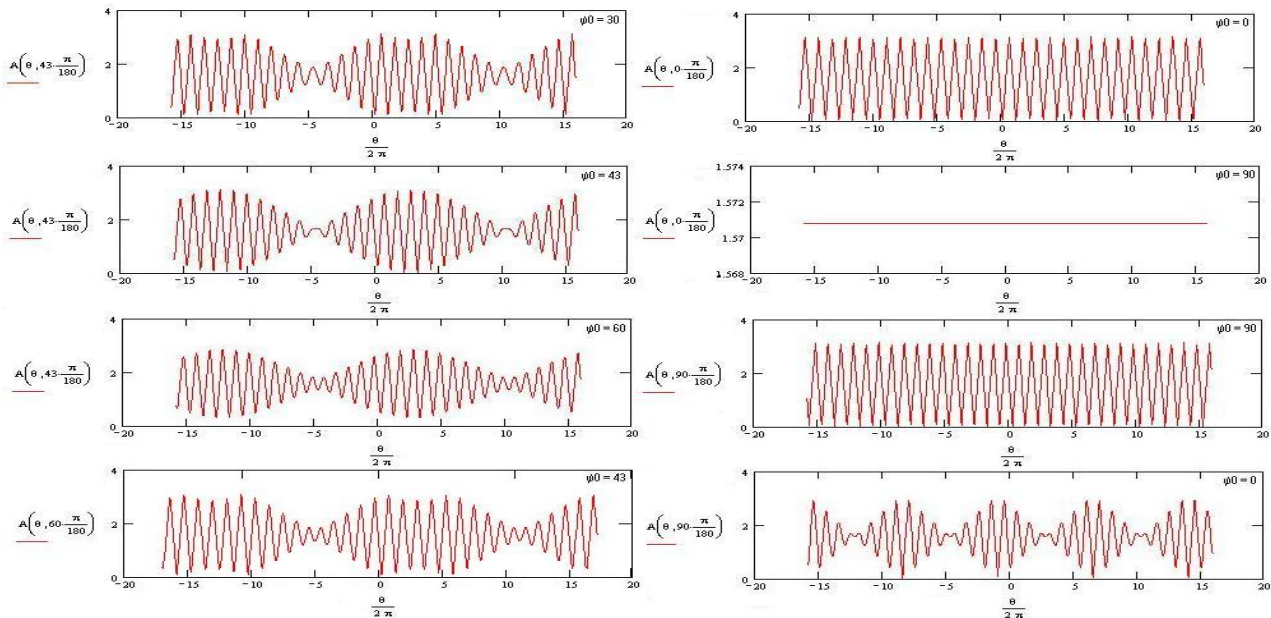
На фиг. 3 е показана графика на плътностната функция на пребиваване на спътника на географски широчини, при различни инклинации на орбитата и за един сферичен градус ъглово покритие. Както се вижда “полярен” спътник ($I = 90^\circ$) прекарва еднаква продължителност от време на всяка географска широчина. За географската широчина на България най-ефективната инклинация на орбитата е $I = 43^\circ$, но това води до невъзможност за наблюдение на обекти намиращи се на по-голяма координата ψ .



Фиг. 3. Пребиваване на спътника за различни инклинации на орбитата.

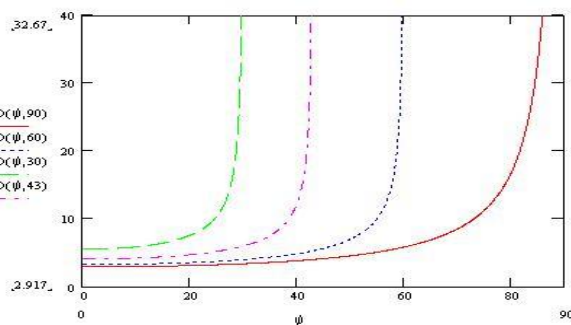
На фиг. 4 са показани зависимости на ъгъла на отделяне A във функция от времето, последното измерено чрез броя обръщания на спътника $(\theta/2\pi)$, в случаите $Q = 15$, $I = (0, 43, 90)\pi/180 [rad]$, $\varphi_0 = 24.\pi/180 [rad]$, $\psi_0 = (0, 30, 43, 60, 90)\pi/180 [rad]$. Ъгълът на отделяне A във всички случаи е синусоидална функция, модулирана от бавно изменяща се обвивка. За първите три диаграми е в сила, че обвиващата крива достига стойности почти нула два пъти за всяко завъртане на Земята (т.е. за 15 обръщания на спътника). На третата диаграма целта е локализирана извън покриващата лента на спътника, така че

минималният ъгъл на отделяне е $\psi_0 - I = 17^\circ$. На фигурата са показани комбинации от различни случаи за стойностите на ъглите ψ_0 и I .



Фиг. 4. Ъгъл на отделяне A на спътника от целта.

На фиг. 5 е изобразена зависимостта на средния брой откривания на целта на ден в зависимост от географската широчина, при инклинации на орбитата $I = (90, 60, 30, 43)\pi/180 \text{ rad}$, ъгъл $\alpha = 17.571^\circ$ ($\beta = 10^\circ$ – ниска орбита), обръщания на спътника $Q = 15$ (височина $H = 700 \text{ km}$) и отчитане на въртенето на Земята. Като следствие от резултатите, изобразени на фиг. 2, и тук се вижда, че най-добрата орбита за откриване на цел с географска широчина $\psi_E = 43^\circ$, при равни други условия, е тази с ъгъл $I = 43^\circ$. В този случай обаче теоретичният среден брой преминавания над целта на ден монотонно клони към $+\infty$. В другия екстремален случай $I = 90^\circ$, над ψ_E (България) се преминава средно 3.984 пъти на ден. За примерен случай $I = 45^\circ$ изчисленията показват 14.85 среден брой преминавания над целта на ден, а за случай $I = 82^\circ$ 4.021 броя. За инклинации $I < 43^\circ$ математическият модел очаквано връща комплексен резултат.



Фиг. 5. Среден брой откривания на целта за различни инклинации на орбитата.

Заклучение.

В настоящия доклад бе изложен статистически метод за определяне на средния брой откривания на цел върху Земната повърхност от ИСЗ, движещ се по кръгова орбита. Демонстриран бе и детерминистичен метод за пресмятане на времето за пребиваване на спътника над целта. И в двата метода бе отчетено въртенето на Земята. Изложените числени резултати засягат различни комбинации между кинематичните параметри на полета на спътника и решават поставената задача за цел с географски координати на територията на България.

Фразата “среден брой откривания”, използвана в изложението означава среден брой откривания за текущата целева географска дължина. Когато броят на обръщанията на спътника е цяло число, може да се окаже, че цели на повечето географски дължини никога няма да бъдат открити. В такъв случай “средният брой откривания” се изчислява за произволното множество географски дължини, през които минава подсателитната точка. При такива обстоятелства знанието на степента на откриване сама по себе си няма да е от голяма полза за определяне на броя или времевите интервали между отделните откривания. Тогава степента на откриване на целта е добре да се третира като степен на развитие на Пуасонов процес ([1/ден]), а процеса на търсене – като случаен. По въпроса съществува литература, касаеща подредбата на спътници, за която целевите географски широчини са винаги покрити – например Rider (1986), Hanson & Higgins (1990), Wilkinson (1994).

Литература.

Hanson, J. M. and Higgins, W.B., “Designing Good Geosynchronous Constellations,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 38, No. 2, April-June 1990, pp. 143-159.

Rider, L., “Analytic Design of Satellite Constellations for Zonal Earth Coverage Using, Inclined Circular Orbits,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 34, No. 1, January-March 1986, pp. 31-64.

Wilkinson, C. K., “Coverage Regions: How They are Computed and Used,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 42, No. 1, January-March 1994, pp. 47-70.