

## Ректификация на геометричните деформации при космическите сканерни изображения чрез апроксимиращи функции

*Никола Георгиев, Румен Недков*

*Институт за космически изследвания, БАН*

### 1. Въведение

Геометричните деформации при космическите сканерни изображения са един от най-съществените въпроси и отстраняването им е извънредно актуален и сложен процес. Те са функция на редица фактори [1–6], а именно:

— космическите летателни апарати (КЛА), носители на сканерната апаратура, се движат с големи скорости по дадена орбита. Освен това Земята има голямо околоосно въртене, поради което може да се получат застъпвания или прекъсване на изображенията;

— голямата височина на космическите носители над Земята и дребният мащаб на изображенията са причина за обхващането на големи области от Земята;

— кривината на Земята е един от факторите, оказващи влияние върху деформациите при сканерните изображения;

— значителните геометрични деформации се дължат на стабилизацията на носителя, големите ъгли на наклон на апаратурата, нецентричността на сканираното изображение и др.

Интерпретационната обработка на снимките, получени от космическите носители, зависи от точността, разделителната възможност на изображението и целите на използването им. В редица случаи, при които се изисква малка точност, може да се ползват коригирани изображения с приблизителни параметри [2,9,10]. Но сега, когато разделителната възможност на сканерните изображения стана изключително висока и достига 0,8–1,5 mm при панохроматичния и 3–5 mm при мултиспектралния режим, точности близки до самолетните снимки, налага се ректификацията на геометричните деформации да се увеличи многократно.

В настоящия етап изображенията на земната повърхност се реализират по два начина: със сканерни изображения в оптичния диапазон на електромагнитния спектър и чрез ортофотоизображения с фотокамери от типа на КВР-1000 с фокусно разстояние 1000 mm, КТ-350 с фокусно разстояние 350 mm и други камери [7]. Първите изображения са централна проекция с подвижен проекционен център  $S$ , а ортофотоизображенията са централна проекция с неподвижен оптичен център. Трябва да се има предвид, че при сканерните изображения геометричните деформации са функция освен на всички фактори, които оказват влияние при ортофотоизображенията, но и съществено зависят от подвижния проекционен център, водещ също до специфични и значителни геометрични деформации. По наше виждане, това налага да се използват конкретните методи за ректификацията на тези два вида изображения, които трябва да се разглеждат като:

- дистанционни сканерни изображения и
- космически ортофотоизображения.

## 2. Използване на апроксимиращи полиноми при коригиране на геометричните деформации

Ще разгледаме използването на апроксимиращи полиноми, които и понастоящем намират големи приложения при ректификацията на геометричните деформации при космическите сканерни изображения [1,3-5,11,12].

Ще приемем, че разполагаме със сканерно изображение със запис на яркост  $F_p(X_p, Y_p)$  на магнитна лента на неголеми области от земната повърхност (пиксели), подредени в матрица с редове и стълбове. Тук няма да бъде предмет на разглеждане възстановяването на изображението, при което са необходими отчети с достатъчна честота и съответно реализирането на възстановяващите филтри. Ще разгледаме математическата обосновка за възстановяването на геометричните качества и съответно привързването на изображението към земната повърхност. Този проблем може да се разреши като се използват два модела: двумерни (равнинни) и пространствени. При равнинния модел на пиксела  $P(x,y)$  от сканерното изображение съответства идентична точка  $P(X,Y)$  от проекционната равнина и обратното, при което  $X$  и  $Y$  са правоъгълните координати в съответната картографска проекция. При пространствения модел на пиксела  $P(x,y)$  съответства точка от повърхността на референтния елипсоид  $P(X_p, Y_p, Z_p)$ , за който след това се намира съответната точка в проекционната равнина. Пространствените модели са предмет на анализи и теоретични доказателства в [1,3,4,6] и др., където са разгледани възможностите за определяне зависимостта между положението на космическия посетел, ориентацията на апаратурата, регистрирането на пикселите и координатите на точките от земната повърхност в пространствена декартова координатна система. Ще отбележим, че при всички тези модели до преди 3-4 години и най-вече при равнинните модели не са определяни елипсоидните височини, а положението на точката се свързва със съответната точка от повърхността на елипсоида [3]. Това се е диктувало от факта, че при космическите изображения, тези деформации са пренебрежимо малки в сравнение с

аерокосмическите, както се отбелязва и в [10]. При аерофотоснимката с височина на летене  $H=5\text{ km}$  в края на снимката с формат  $18\text{ cm} \times 18\text{ cm}$  и височина на терена  $h=100\text{ m}$  изместването е  $2\text{ mm}$ , при  $h=1000\text{ m}$  е  $2\text{ cm}$ . При космическите фотоснимки, направени от  $H=200\text{ km}$ , тези деформации са 40 пъти по-малки, т.е. за превисение  $h=200\text{ m}$  имаме  $0,05\text{ mm}$ , а за  $h=1000\text{ m}$  —  $0,5\text{ mm}$ .

По-долу ще дадем резултатите от изследванията, които се проведеха за коригирането на геометричните деформации и привързването на дистанционните изображения към картната проекция при равнинния модел [1,5,12]. В качеството на апроксимиращи функции обикновено се използват степенни редове, интерполационни формули, сплайн-функции и други [1,5,11,12].

Тук ще използваме полиноми по степените на двете променливи  $x$  и  $y$ , а именно:

$$(1) \quad \begin{aligned} X_j &= a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j + \dots + a_{27} y_j^6, \\ Y_j &= b_0 + b_1 x_j + b_2 y_j + \dots + b_{27} y_j^6, \end{aligned}$$

където  $j = 1, 2, \dots, n$  е броят на идентифицираните точки,  $x_j, y_j$  са координатите на пиксела в деформируемото изображение,  $X_j, Y_j$  са координатите на съответната точка от проекционната (картна) равнина,  $a_i$  и  $b_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, 27$ ) се получават с помощта на съответните идентифицирани опорни точки от картата. Обикновено броят на идентичните точки е по-голям от параметрите на приетия модел и определянето на неизвестните  $a_i$  и  $b_i$  се извършва чрез изравнение по метода на най-малките квадрати (МНК), при което има възможност за бракуване на грешните данни и съответно оценка на определяемите параметри.

Ще отбележим, че точността на идентифицираните опорни точки от картната равнина зависи от: мащаба, картографската проекция, деформируемостта на картния лист, средствата и методите за отчитане на координатите и др.

За да се избегнат затрудненията от изчислителен характер при определяне на коефициентите  $a_i$  и  $b_i$ , т.е. да се работи с по-малки стойности на координатните разлики, е подходящо да се използва методът от астрометрията, явяващ се много подходящ при такива изчисления и особено когато се налага да се използва част от изображението. В случая се приемат равнинните координатни системи  $x, y$  и  $X, Y$ , които да съвпадат с центъра на тежестта на избраните опорни точки и се изменят в интервала  $[-1, 1]$ . Нека  $(G'_x, G'_y)$  и  $(G_x, G_y)$  са координатите на центъра на тежестта на избраната конфигурация от опорни точки, които са определени по изразите

$$(2) \quad \begin{aligned} G'_x &= \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n} & G_x &= \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} \\ G'_y &= \frac{\sum_{j=1}^n y_j}{n} & G_y &= \frac{\sum_{j=1}^n Y_j}{n} \end{aligned}$$

След трансляцията на координатните системи  $X, Y$  и  $x, y$  в центъра на тежестта, чието начало се дава с (2) се получават новите стойности на координатите

$$(3) \quad \begin{aligned} x'_j &= x_j - G'_x & X'_j &= X_j - G_X \\ y'_j &= y_j - G'_y & Y'_j &= Y_j - G_Y \end{aligned}$$

Избират се още мащабиращи множители, които да са обратно пропорционални на координатите на опорните точки, имащи максимални стойности:

$$(4) \quad M'_{xy} = \frac{1}{\max_j (x'_j, y'_j)}, \quad M'_{XY} = \frac{1}{\max_j (X'_j, Y'_j)}$$

Ако значенията  $X'_j, Y'_j$  и  $x'_j, y'_j$  са от еднакъв порядък, то може да приемем, че  $M'_{xy} = M'_{XY} = M$ .

Прилагайки трансформацията (3) за (1) се получава

$$(5) \quad \begin{aligned} \bar{X}_j &= a_0 + a_1 \bar{x}_j + a_2 \bar{y}_j + \dots + a_{27} \bar{y}_j^6, \\ \bar{Y}_j &= b_0 + b_1 \bar{x}_j + b_2 \bar{y}_j + \dots + b_{27} \bar{y}_j^6, \end{aligned}$$

където

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{X}_j &= MX'_j & \bar{x}_j &= Mx'_j \\ \bar{Y}_j &= MY'_j & \bar{y}_j &= My'_j \end{aligned}$$

За определяне на коефициентите  $a$ , и  $b$ , е използван апроксимационният метод по МНМК посредством координатите  $\bar{x}_j, \bar{y}_j$  на идентифицираните опорни точки от изображението, а координатите  $X'_j, Y'_j$ , определени от картата, се приемат за твърди точки. Нека означим координатите на опорните точки от картата с:

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{X}_j &= (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{n-1}, \bar{X}_n)^T, \\ \bar{Y}_j &= (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_{n-1}, \bar{Y}_n)^T, \end{aligned}$$

а координатите от деформираното изображение с:

$$(8) \quad \begin{aligned} \bar{x}_j &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)^T, \\ \bar{y}_j &= (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1}, \bar{y}_n)^T. \end{aligned}$$

Уравненията на поправките имат вида

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{x}_j + V_{\bar{x}_j} &= A_{ij} \bar{a}_i, \\ \bar{y}_j + V_{\bar{y}_j} &= A_{ij} \bar{b}_i, \end{aligned}$$

където

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{a}_i &= (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{27})^T, \\ \bar{b}_i &= (\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{27})^T, \\ \bar{V}_{\bar{x}_j} &= (\bar{V}_{\bar{x}_1}, \bar{V}_{\bar{x}_2}, \dots, \bar{V}_{\bar{x}_{27}})^T, \\ \bar{V}_{\bar{y}_j} &= (\bar{V}_{\bar{y}_1}, \bar{V}_{\bar{y}_2}, \dots, \bar{V}_{\bar{y}_{27}})^T. \end{aligned}$$

Матрицата  $A$  в (9) има вида

$$(11) \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{X}_{1j} & \bar{Y}_{1j} & \bar{X}_{1j}^2 & \bar{X}_{1j}\bar{Y}_{1j} & \dots & \bar{Y}_{1j}^6 \\ 1 & \bar{X}_{2j} & \bar{Y}_{2j} & \bar{X}_{2j}^2 & \bar{X}_{2j}\bar{Y}_{2j} & \dots & \bar{Y}_{2j}^6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \bar{X}_{nj} & \bar{Y}_{nj} & \bar{X}_{nj}^2 & \bar{X}_{nj}\bar{Y}_{nj} & \dots & \bar{Y}_{nj}^6 \end{bmatrix}.$$

За векторите  $a$  и  $b$  са в сила уравненията

$$(12) \quad \begin{aligned} (A^T P_x A) \bar{a} &= A^T P_x \bar{X}, \\ (A^T P_y A) \bar{b} &= A^T P_y \bar{Y}. \end{aligned}$$

В случая трябва да се приеме, че координатите на определените опорни точки са с еднакви тежести. Следователно тежестната матрица  $P$  е единична:

$$(13) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

в резултат от (12) се получава за  $a_i$  и  $b_i$  изразът:

$$(14) \quad \begin{aligned} \bar{a} &= (A^T P_x A)^{-1} (A^T P_x \bar{X}), \\ \bar{b} &= (A^T P_y A)^{-1} (A^T P_y \bar{Y}). \end{aligned}$$

Средните квадратични грешки  $m_{\bar{a}_i}$  и  $m_{\bar{b}_i}$ , с които са определени коефициентите  $a_i$  и  $b_i$  се дават с формулите

$$(15) \quad \begin{aligned} m_{\bar{a}_i} &= \mu_{\bar{x}}^2 q_{ij}, \\ m_{\bar{b}_i} &= \mu_{\bar{y}}^2 q_{ij}, \end{aligned}$$

където  $\mu_{\bar{x}}$  и  $\mu_{\bar{y}}$  са средните квадратични грешки за единица тежест:

$$(16) \quad \begin{aligned} \mu_{\bar{x}}^2 &= V_{\bar{x}}^T P V_{\bar{x}} \frac{1}{n-k}, \\ \mu_{\bar{y}}^2 &= V_{\bar{y}}^T P V_{\bar{y}} \frac{1}{n-k}, \\ q_{ij} &= (A^T P A)^{-1}, \end{aligned}$$

където  $n$  е броят точки,  $k$  — броят на коефициентите, а  $q_{ij}$  е матрицата на диагоналните елементи на  $(A^T P A)^{-1}$ .

Ако определените по (12) средни квадратни грешки са по-големи от коефициентите  $a_i$  и  $b_i$ , определени от (14), е целесъобразно да се проведе още ново изравнение за определяне на коефициентите, докато се удовлетворят условията

$$(17) \quad \begin{aligned} m_{\bar{a}_i} &\leq \chi |\bar{a}_i|, \\ m_{\bar{b}_i} &\leq \chi |\bar{b}_i|. \end{aligned}$$

$\chi$  е множител, с чиято помощ се определят коефициентите, които имат стойности, по-големи от средните квадратични грешки (12). Препоръчва се  $> 2$ .

Голямото число на неизвестните (до 28) обикновено води до лоша обусловеност на матрицата. За оценка на избора на максималното число коефициенти е подходящо да се използва числото на Тод [12]

$$(18) \quad T = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

където  $\lambda_{\max}$  и  $\lambda_{\min}$  са максималното и минималното характеристично число на нормалната матрица.

За определянето на оптималните числа на членовете в полинома (5) се изчисляват разликите  $\Delta X_k$  и  $\Delta Y_k$  за достатъчно контролни точки, които са разположени върху изображението, а именно:

$$(19) \quad \begin{aligned} \Delta \bar{X}_k &= \bar{X}_k - \bar{x}_k, \\ \Delta \bar{Y}_k &= \bar{Y}_k - \bar{y}_k, \end{aligned}$$

където  $\bar{x}_k$  и  $\bar{y}_k$  са координатите на контролните точки в изходното сканерно изображение,  $\bar{X}_k$  и  $\bar{Y}_k$  са картните координати,  $n$  е броят на контролните точки. За избор на оптималния брой членове в полинома е подходящо да се използват средноквадратичните отклонения за  $\Delta X$  и  $\Delta Y$  на контролните точки:

$$(20) \quad \begin{aligned} \Delta \bar{X}_k &= \left( \sum^k \frac{\Delta \bar{X}_k}{N_k} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \Delta \bar{Y}_k &= \left( \sum^k \frac{\Delta \bar{Y}_k}{N_k} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

където  $N_k$  е броят на контролните точки.

Изборът на оптималния брой членове в полинома може да се направи също с помощта на средно квадратичната грешка  $m_{\bar{x}}$  и  $m_{\bar{y}}$  на контролните точки в полинома.

$$(21) \quad m_{\bar{X}_k}^2 = \frac{\mu_{\bar{X}_k}^2}{P_{\bar{X}_k}}, \quad m_{\bar{Y}_k}^2 = \frac{\mu_{\bar{Y}_k}^2}{P_{\bar{Y}_k}}$$

$P_x, P_y$  се определят по изразите

$$(22) \quad \frac{1}{P_{\bar{X}_k}} = \frac{\partial \bar{X}_k}{\partial \bar{a}} Q \frac{\partial \bar{X}_k}{\partial \bar{a}}, \quad \frac{1}{P_{\bar{Y}_k}} = \frac{\partial \bar{Y}_k}{\partial \bar{b}} Q \frac{\partial \bar{Y}_k}{\partial \bar{b}},$$

където  $\frac{\partial \bar{X}_k}{\partial \bar{a}}$  и  $\frac{\partial \bar{Y}_k}{\partial \bar{b}}$  са векторите на частните производни на получените коефициенти  $\bar{a}_i$  и  $\bar{b}_i$  в полинома, а  $Q$  е корелационната матрица. Средноквадратните грешки  $m_{\bar{x}}, m_{\bar{y}}$  също може да се използват за определяне на оптималния брой членове, но тук няма да привеждаме математическите изрази на тези формули, които са дадени в [5].

Освен горните величини се определят и мащабите  $M_{\bar{x}}$  и  $M_{\bar{y}}$  за трансформираните изображения

$$(23) \quad M_{\bar{x}} = \left[ \left( \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad M_{\bar{y}} = \left[ \left( \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

За определяне на най-добрите полиноми за трансформациите и корекциите на сканерните изображения в [1] е дадена програма POLISKAN, с която се извършиха експерименти по определяне на коефициентите на полинома при максимален брой членове от 3 до 28, като са използвани равномерно разположени 81 точки, определени с точност 0,1 пиксела, от които около 50 точки са опорни, а останалите контролни. Началото на координатните системи  $X, Y$  и  $x$  и  $y$  съвпадат с центъра на тежестта, а координатите са мащабирани в интервала  $(-10, 10)$ . Използваните от 20 до 50 опорни точки показват задоволителни резултати за точността при определяне на корекцията на полинома. Изчислените отклонения по формула (19) между контролните точки показват, че увеличаването на степента на полинома до пета степен, води до намаляване на отклоненията. Когато полиномът е до шеста степен, се наблюдават някои незадоволителни резултати. Оптималното число членове на полинома, обезпечаващ точност един пиксел, е необходимо по  $Y - 7$ , а по  $X - 12$ . Трябва да отбележим, че за коригиране участък до  $1/4$  от изображението са достатъчни 15 опорни точки и 6-7 коефициента, което потвърждава извода за степента на полинома.

Неравномерното разположение на опорните точки и техните сравнително големи грешки не позволяват да се постигнат достатъчно големи точности при използване на апроксимиращи полиноми и много често се стига до незадоволителни резултати, особено когато степента на полинома надвишава пета степен. Когато числото на коефициентите е по-голямо от 20, грешката за единица тежест се намалява, а отклонението на контролните точки нараства скокообразно. Това може да се обясни с

факта, че четири от контролните точки обикновено се избират в краищата на изображението.

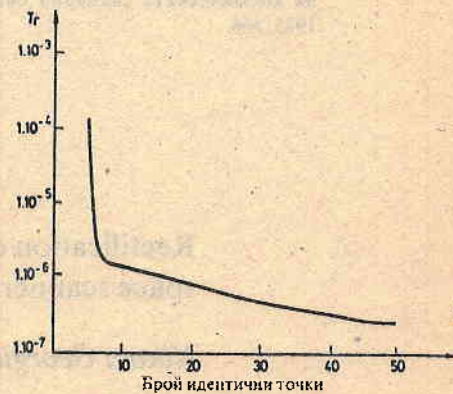
Получените резултати дават основание да се отбележи, че оптималното число на членовете в полинома (1), за коригирането на  $X$  е необходимо да бъде до 20—21, а за  $Y$  до 6—9 члена. От моделните изследвания в [1] следват изводите:

1. За получаване на оптимален коригирац полином са необходими 35—45 идентични опорни точки, разположени равномерно в изображението.
2. Най-бързо повишаване на точността става след 10—15 точки до 45.
3. Оптималното число членове в полинома следва да се избира на основата на минималните стойности в отклонения на избраните контролни точки, разположени в краищата на изображението.
4. Най-подходящи са полиномите до пета степен.

За оптималното количество идентични точки и най-подходящите места за тяхното разположение върху сканерното изображение в [13] са получени резултати, които са представени на фиг. 1 и фиг. 2.

| Ред | Колона |   |   |    |    |    |    |    |   |    |    |
|-----|--------|---|---|----|----|----|----|----|---|----|----|
|     | 1      | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9 | 10 | 11 |
| 1   | 0      |   |   | 43 | 9  | 7  | 14 | 50 |   |    | 0  |
| 2   | 16     |   |   |    | 18 | 13 | 24 |    |   |    | 15 |
| 3   | 19     |   |   |    | 32 | 26 | 34 |    |   |    | 20 |
| 4   | 31     |   |   |    | 46 | 38 | 48 |    |   |    | 30 |
| 5   | 41     |   |   |    |    | 49 |    |    |   |    | 40 |
| 6   | 45     |   |   |    |    | 0  |    |    |   |    | 47 |
| 7   | 37     |   |   |    |    |    |    |    |   |    | 39 |
| 8   | 29     |   |   |    |    | 42 |    |    |   |    | 28 |
| 9   | 22     |   |   |    | 33 | 27 | 35 |    |   |    | 23 |
| 10  | 12     |   |   |    | 21 | 17 | 25 |    |   |    | 11 |
| 11  | 0      |   |   | 36 | 8  | 6  | 10 | 44 |   |    | 0  |

Фиг. 1. Разположение на най-информативните идентични точки



Фиг. 2. Следа на корелационната матрица

## Литература

1. Тема по ИИС - ВИАС. Автоматизиране на геодезичните изчислителни методи на космическото сканиране (Рък. колектив на кат. „Висша геодезия“ проф. д-р М. Даскалова, на колектив на ЦЛВГ - БАН — проф. д-р ф.м.н. Н. Георгиев), С., 1984.
2. Larsson, J. Rectification of Digital Images for Remot Sensing Analysis. Stockholm Meddelande report 2, 43, 1980.
3. Даскалова, М. Върху обработката на сканерни изображения в приета картографска проекция. — Год. на ВИАС, С., XXXIII, 1987—1988.
4. Пейчев, С. Моделно изследване на геометричните деформации при космическите сканерни снимки. — Геод., картогр. и земеустр., 6, 1984.
5. Георгиев, Н. Изследване на деформациите при дистанционното сканиране на Земята от ИСЗ и тяхното значение върху изображенията. Отчет на тема при секция „Дистанционни изследвания на Земята от космоса“, ИКИ - БАН, 1996/98.



6. Georgiev, N., R. Nedkov. Space Scanner Images Processing Using GPS Measuring and Definite Reference Ellipsoid, Pecora 14, The Fourteenth William T. Pecora Memorial Remote Sensing Symposium, The Land Satellite Information in the Next Decade, 1999, Denver, Colorado USA (in orss).
7. Стоименов, А. Ново поколение спътникови изображения за целите на картографията. Техн. бюлет. Военно топ. служба, С., МО, 1998.
8. Хижииченко, В. И. Оценка геометрических искажений сканерных телевизионных систем. — Геодезия и картография, М., 1979, кн. 11.
9. Чапанов, Я. Коригиране на геометрическите деформации в сканерните изображения чрез полиноми до шеста степен. — Висша геодезия, 1985, №11.
10. Зиман, Л., В. Баратов. Трансформирование снимков в заднюю картографическую проекцию с помощью ЭФМ. — Геодезия и картография, 1975, №6.
11. Даскалова, М., Нгуен Тхан. Приложение на сплайн-функциите при обработка на сканерни изображения. — Геодезия, картография и земеустройство, 1986.
12. Цаков, Д., П. Димитров. Цифрови данни за местността — информационна основа за нови технологични решения. Технически бюлетин „Геодезия, Фотограметрия, картография“, Военно топ. служба, С., МО, 1998.
13. Пейчев, С. Оптимизация на разположението и броя на идентичните точки при ректификацията на космическите сканерни снимки. — Геодезия, картография, земеустройство, 1985, №6.

Постъпила на 10.V.1999г.

## Rectification of the geometric deformations in space scanner images by approximation functions

*Nikola Georgiev, Rumen Nedkov*

(Summary)

The problems related with geometric deformations in space scanner images are considered and analyzed.

In the paper, a precise mathematical method for rectification of scanner images by the use of polynoms with the plane model is presented. The formulae derived and calculations made provide for the processing to be made by the Least Square Method (LSM), determining the values (standards) of the quantities obtained.

Based on the mathematical expressions derived, calculations are made for determination of the optimal number of polynom members and the number of control points for correction of the geometric deformations.