Българска академия на науките. Bulgarian Academy of Sciences
Аерокосмически изследвания в България. 11. Aerospace Research in Bulgaria
София. 1994. Sofia

Пространствено поле на скоростите, индуцирани от вихров отрязък, произволно ориентиран в пространството

Георги Иванов

В нелинейната теория на носещите повърхности е удобно в качеството на основен вихров елемент да се разглежда праволинеен вихров отрязък, произволно ориентиран в пространството. Да разгледаме вихров отрязък с дължина l_0 и циркулация Γ_+, произволно ориентиран относно координатната система $Oxyz$ (фиг. 1).

Нека чрез A означим началото на вихровия отрязък, а чрез B — края. Точките A и B имат следните координати: $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

За удобство въвеждаме следните безразмерни величини:

$$\Gamma=\frac{\Gamma_+}{u_0 b};\ \xi=\frac{x}{b},\ \eta=\frac{y}{b},\ \zeta=\frac{z}{b},\ \xi_0=\frac{x_0}{b},\ \eta_0=\frac{y_0}{b},\ \zeta_0=\frac{z_0}{b},$$
$$\xi_1=\frac{x_1}{b},\ \eta_1=\frac{y_1}{b},\ \zeta_1=\frac{z_1}{b},\ \xi_2=\frac{x_2}{b},\ \eta_2=\frac{y_2}{b},\ \zeta_2=\frac{z_2}{b}, \tag{1}$$

където b е характерен линеен размер.

Съгласно с фиг. 1. означаваме с a разстоянието AM, с c — MB, с h — перпендикуляра от точка M към AB, с l_0 означаваме дължината на вихровия отрязък.

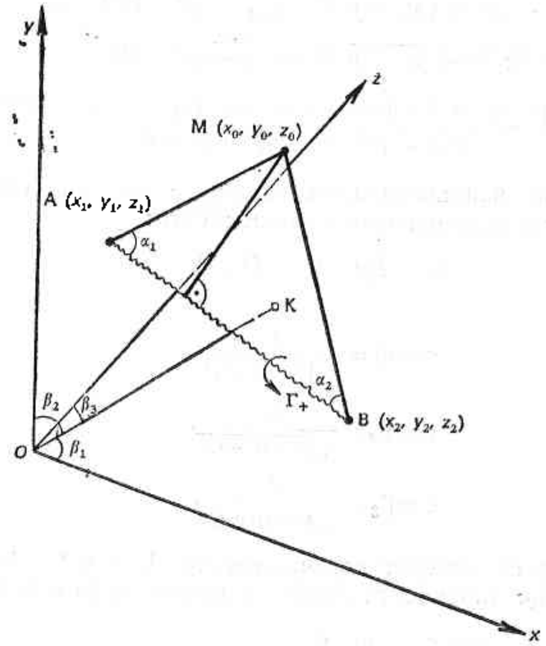
Скоростта, индуцирана от указания вихров отрязък в т. $M(x_0, y_0, z_0)$, съгласно с формулата на Био — Савар е

$$W=\frac{\Gamma_+}{4\pi h}(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2), \tag{2}$$

където h е разстояние между точката, в която определяме скоростта и вихровия отрязък; α_1 и α_2 — ъгли между присъединения вихър и отсечките, съединяващи разглежданата точка с краищата му.

Проекциите на смутената скорост на осите Ox, Oy, Oz са

$$W_x=W\cos\beta_1,$$
$$W_y=W\cos\beta_2, \tag{3}$$
$$W_z=W\cos\beta_3.$$



Фиг. 1. Изчисляване на скоростите от вихровия отрязък AB, произволно ориентиран в пространството

Ъглите β_1, β_2 и β_3 са ъгли, които сключва нормалата към плоскостта ABM с осите на координатната система. Положителното направление на нормалата се съгласува с положителното направление на Γ_+. Трябва да се намерят величините, влизащи в (2) и (3). Знаем координатите на върховете на триъгълника. Съгласно с фиг. 1 уравненията на трите страни на триъгълника са

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

(4)
$$\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{y-y_1}{y_0-y_1}=\frac{z-z_1}{z_0-z_1},$$

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_0}=\frac{y-y_0}{y_2-y_0}=\frac{z-z_0}{z_2-z_0}.$$

Ъглите α_1 и α_2 са ъгли на пресичане на правите AM и BM с правата AB, а величината h е разстояние от точката M до правата AB. Следователно:

$$\cos\alpha_1=\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_0)+(y_1-y_2)(y_1-y_0)+(z_1-z_2)(z_1-z_0)}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

(5)

$$\cos\alpha_2=\frac{(x_2-x_1)(x_2-x_0)+(y_2-y_1)(y_2-y_0)+(z_2-z_1)(z_2-z_0)}{\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(z_2-z_0)^2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2(z_2-z_1)^2}},$$

където

$$\sqrt{(x_1-x_0)^2-(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}=\mathrm{AM}=a,$$

$$\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(z_2-z_0)^2}=\mathrm{BM}=c,$$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\mathrm{AB},$$

$$h=\frac{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2+[(x_1-x_0)(x_2-x_1)+(y_1-y_0)(y_2-y_1)+(z_1-z_0)(z_2-z_1)]^2}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

За определяне на направляващите косинуси на нормалата към плоскостта ABM записваме уравнението на плоскостта:

(6) $$Ax+By+Cz+D=0.$$

Тогава

(7)
$$\cos\beta_1=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\beta_2=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\beta_3=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Необходимо е да се намерят коефициентите A, B и C. За целта се разглежда уравнението на плоскостта ABM, минаваща през точките A, B и M:

(8) $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Използувайки (6) и (8), се получава

(9)
$$A=(y_2-y_1)(z_1-z_0)-(z_2-z_1)(y_1-y_0),$$
$$B=(z_2-z_1)(x_1-x_0)-(x_2-x_1)(z_1-z_0),$$
$$C=(x_2-x_1)(y_1-y_0)-(y_2-y_1)(x_1-x_0).$$

Въвеждаме безразмерна скорост

(10) $$W=\frac{u_0\Gamma}{2\pi}w.$$

Тогава, съгласно (2) и използувайки (1) получаваме

(11) $$w=\frac{1}{2\bar{h}}(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2),\quad \bar{h}=\frac{h}{b}.$$

Проекциите на безразмерната скорост на координатните оси са

(12)
$$w_x=\frac{1}{2\bar{h}}(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)\cos\beta_1,$$
$$w_y=\frac{1}{2\bar{h}}(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)\cos\beta_2,$$
$$w_z=\frac{1}{2\bar{h}}(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)\cos\beta_3.$$

Преминаваме към безразмерни координати и въвеждаме следните означения:

$$a_0=(\eta_2-\eta_1)(\zeta_1-\zeta_0)-(\zeta_2-\zeta_1)(\eta_1-\eta_0),$$
$$b_0=(\zeta_2-\zeta_1)(\xi_1-\xi_0)-(\xi_2-\xi_1)(\zeta_1-\zeta_0),$$
$$c_0=(\xi_2-\xi_1)(\eta_1-\eta_0)-(\eta_2-\eta_1)(\xi_1-\xi_0).$$
$$\overline{a}=\sqrt{(\xi_1-\xi_0)^2+(\eta_1-\eta_0)^2+(\zeta_1-\zeta_0)^2}, \tag{13}$$
$$\overline{c}=\sqrt{(\xi_2-\xi_0)^2+(\eta_2-\eta_0)^2+(\zeta_2-\zeta_0)^2},$$
$$a_1=(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_0)+(\eta_1-\eta_2)(\eta_1-\eta_0)+(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_0),$$
$$a_2=(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_0)+(\eta_2-\eta_1)(\eta_1-\eta_0)+(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_2-\zeta_0).$$

Тогава формулите за проекциите на безразмерните скорости се представят във вида

$$w_x=\frac{0{,}5\,a_0}{a_0^2+b_0^2+c_0^2}\left(\frac{a_1}{\overline{a}}+\frac{a_2}{\overline{c}}\right),$$
$$w_y=\frac{0{,}5\,b_0}{a_0^2+b_0^2+c_0^2}\left(\frac{a_1}{\overline{a}}+\frac{a_2}{\overline{c}}\right), \tag{14}$$
$$w_z=\frac{0{,}5\,c_0}{a_0^2+b_0^2+c_0^2}\left(\frac{a_1}{\overline{a}}+\frac{a_2}{\overline{c}}\right).$$

При $h\to 0$ скоростите на вихровия отрязък се стремят към безкрайност При $h=0$, следва:

$$w_{(x,y,z)}=0. \tag{15}$$

От (15) и (7) следва, че при $h=0$

$$a_0^2+b_0^2+c_0^2=0. \tag{16}$$

Следователно, ако в процеса на изчисленията се появи равенството (16), то следва, че $w_{(x,y,z)}=0$.

При решаване на стационарни задачи е удобно да се ползува дължината на вихровия отрязък l_0 и неговите направляващи косинуси $\cos(l, x)$, $\cos(l, y)$, $\cos(l, z)$. От равенства от типа

$$\cos(l, x)=\frac{x_2-x_1}{l_0},$$
$$\cos(l, y)=\frac{y_2-y_1}{l_0},$$
$$\mathrm{coc}(l, z)=\frac{z_2-z_1}{l_0},$$

имаме:

$$\xi_2=\xi_1+\overline{l}_0\cos(l, x),$$
$$\eta_2=\eta_1+\overline{l}_0\cos(l, y), \tag{17}$$
$$\zeta_2=\zeta_1+\overline{l}_0\cos(l, z),$$

където $\overline{l}_0=l/b$ е безразмерна дължина на вихровия отрязък.

За намиране на безразмерните скорости значенията на $(\xi_2-\xi_1)$, $(\eta_2-\eta_1)$, $(\zeta_2-\zeta_1)$ заместваме в (13) в съответствие със (17). Получаваме

$$a_0=\overline{l}_0\cos(l,\ y)(\zeta_1-\zeta_0)-\overline{l}_0\cos(l,\ z)(\eta_1-\eta_0).$$
$$b_0=\overline{l}_0\cos(l,\ z)(\xi_1-\xi_0)-\overline{l}_0\cos(l,\ x)(\zeta_1-\zeta_0).$$
$$c_0=\overline{l}_0\cos(l,\ x)(\eta_1-\eta_0)-\overline{l}_0\cos(l,\ y)(\xi_1-\xi_0),$$
$$\overline{a}=\sqrt{(\xi_1-\xi_0)^2+(\eta_1-\eta_0)^2+(\zeta_1-\zeta_0)^2},$$
$$\overline{c}=\sqrt{(\xi_1-\xi_0+\overline{l}_0\cos(l,x))^2+(\eta_1-\eta_0+\overline{l}_0\cos(l,y))^2+(\zeta_1-\zeta_0+\overline{l}_0\cos(l,z))^2},$$
$$a_1=(-\overline{l}_0\cos(l,\ x))(\xi_1-\xi_0)+(-\overline{l}_0\cos(l,\ y))(\eta_1-\eta_0)+(-\overline{l}_0\cos(l,\ z))(\zeta_1-\zeta_0),$$
$$a_2=\overline{l}_0\cos(l,\ x)(\xi_1-\xi_0+\overline{l}_0\cos(l,\ x))+\overline{l}_0\cos(l,\ y))(\eta_1-\eta_0+\overline{l}_0\cos(l,\ y))$$
$$+\overline{l}_0\cos(l,\ z)(\zeta_1-\zeta_0+\overline{l}_0\cos(l,\ z)).$$

Получените значения използваме във формули (14) за проекциите на безразмерните скорости.

Литература

1. Бонев, Б. И. Потенциал скоростей и поле скоростей. индуцируемых вихрем при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Научно-методические материалы по конструкции и обоснованию ТТД летательных апаратов, изд. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, М., 1973.
2. Белоцерковский, С. М., Б. К. Скрипач. В. Г. Тябачников. Крило в нестационарном потоке газа. М., Наука, 1971.

Постъпила на 26. X. 1993 г.

Spatial field of the velocities induced by a vortex piece arbitrarily oriented in space

Georgi Ivanov

(Summary)

A rectilinear vortex piece arbitrarily oriented in space has been considered as a basic vortex element in the nonlinear theory of bearing surfaces. The formulae for the nondimensional velocities caused by a vortex piece with length l_0 and circulation Γ_+ have been derived.